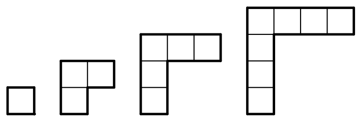
Числа и фигуры

Гномоны

Гномонами греки называли фигурки вида:

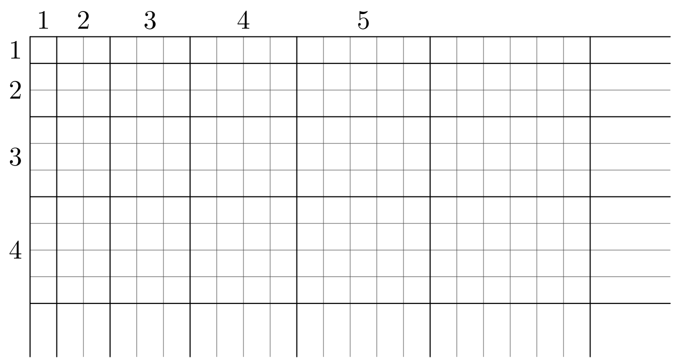


Задача 1.1. Найдите число Γ_k квадратиков в k-той фигурке.
Задача 1.2. Чему равно k-тое нечётное число и сумма первых k нечётных чисел? Чему равно k-тое чётное число и сумма первых k чётных чисел?

Пифагорова таблица умножения

Древние греки не умели записывать числа так, как мы это делаем сейчас. Поэтому их счёт отличался от нашего.

Перед вами древнегреческая таблица умножения:



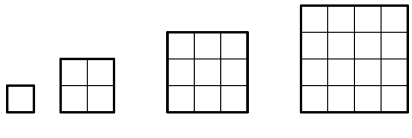
Задача 1.3. Объясните геометрически, почему всегда $ab = ba$.
Задача 1.4. Сколько существует различных прямоугольников, состоящих ровно из

а) 12 клеточек? **б)** 251 клеточки?

Задача 1.5. Найдите такое наименьшее n, что существует ровно пять различных прямоугольников, состоящих ровно из n клеточек.

Квадраты

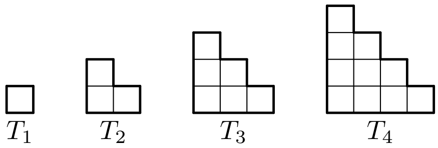
Изображение чисел фигурками на клетчатой бумаге связывает со многими числами яркие геометрические образы. Так, числа вида $a \cdot a$ с античных времён называются квадратами, или четырёхугольными числами.



Задача 1.6. Выпишите первые 13 квадратов целых чисел и найдите среди них квадраты, являющиеся суммой двух других квадратов.

Треугольные числа

Помимо квадратов, пристальное внимание древнегреческих математиков привлекали треугольные числа T_n, равные количеству клеток в прямоугольных ступенчатых треугольниках типа тех, которые показаны на рисунке.



Задача 1.7. Продолжите этот ряд и найдите первые 10 треугольных чисел.
Задача 1.8. Что за числа будут получаться при сложении пар последовательных треугольных чисел: $T_1 + T_2, T_2 + T_3, \ldots$?
Задача 1.9. Сложите прямоугольник из двух одинаковых ступенчатых треугольников T_n. Каковы его стороны? Получите отсюда явную формулу для T_n.
Задача 1.10. Сколько клеток в k-том, считая от верхнего левого угла пифагоровой таблицы, «толстом» гномоне, вершина которого представляет k, а стороны суть произведения k на $1, 2, \ldots, (k-1)$?
Задача 1.11. Сформулируйте и докажите теорему, описывающую явление: $3+5 = 2^3$, $7+9+11 = 3^3$, $13 + 15 + 17 + 19 = 4^3, \ldots$
Задача 1.12. Вычислите суммы:

а) $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3$
б) $T_1 + 2T_2 + \ldots + nT_n$
в)* $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$
г)* $T_1 + T_2 + \ldots + T_n$

Задача 1.13. Докажите геометрически теорему Диофанта:

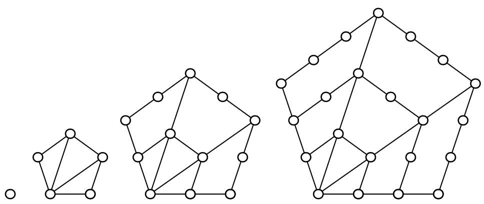
$$8T_n + 1 = (2n + 1)^2.$$

Задача 1.14. Докажите теорему сложения треугольных чисел:

$$T_{mn} = T_m + T_n + mn.$$

Пятиугольные числа

Естественно, античные математики не ограничивались треугольными и квадратными числами. Так же они изучали пятиугольные числа:



Задача 1.15. Обозначим k-тое пятиугольное число через P_k. Чему равно $P_k - P_{k-1}$? Выразите P_n через n.

***

Аналогичным образом можно определять любые другие многоугольные числа.
Задача 1.16. Нарисуйте и вычислите первые 4 шестиугольных числа.
Задача 1.17. Суммами каких арифметических прогрессий являются пяти- и шестиугольные числа? А k-угольные числа? Напишите формулу для n-того шести-, семи- и k-угольного чисел.
Задача 1.18.

а) Докажите, что n-тое четырёхугольное число на n меньше, чем сумма n-того треугольного и n того пятиугольного чисел. Попробуйте решить эту задачу двумя способами: алгебраически и геометрически.

б) Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение для семи- и восьмиугольных чисел.

в) Верно ли, что сумма n-тых $(k + 1)$-угольного и $(n + 1)$-угольного чисел на n больше n-того $k + l$-угольного числа?